

精心备课 教书育人

—线性代数教学心得

福建师范大学福清分校 郭世乐



俗话说：教学有法，但无定法，贵在得法

教学活动虽然要严格按照教学大纲、根据教学目标，达到一定的质量标准，但教学活动的对象和主体是活生生的人，个性差异很大，因而教学过程是一个动态的过程。

一、教材处理

若即若离：再好的教材也不要完全按照教材讲课，再不好的教材也不要完全脱离教材讲课。

讲稿与教材写得一模一样的教师，肯定不是好教师。讲稿与教材有所不同，才能加深扩大学生的知识，培养学生的综合能力。

——潘懋元《高等教育学讲座》



二、教学手段选择

传统与现代相结合：各有优缺点，互为补充。

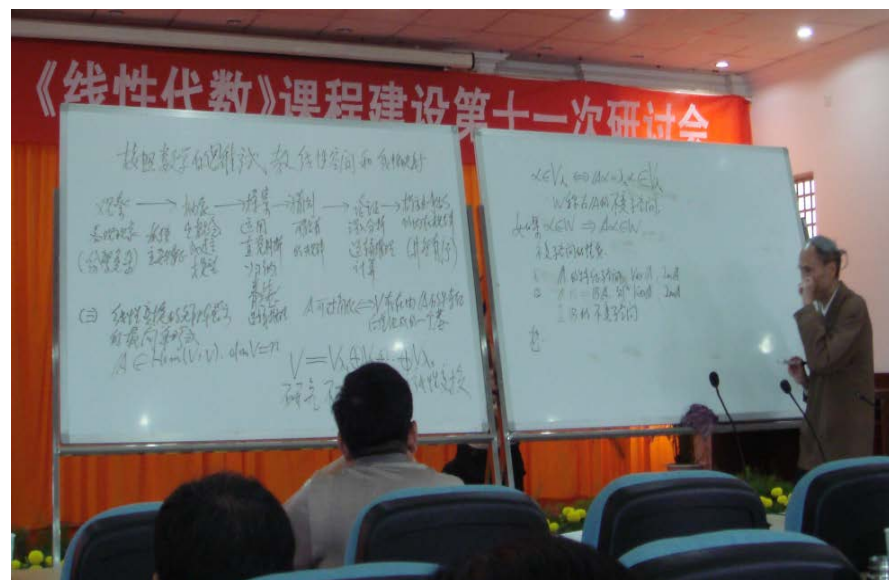
板书的优点是：可以长时间保留，教师讲解速度与学生理解速度协调，学生容易接受；

板书的缺点是：费时间，课堂容量小，备课难度大，对教师要求高。

PPT的优缺点与板书基本相反，但备课难度并不小，对教学内容要熟悉，否则容易“读”PPT。

板书重设计，PPT重精细。

北京大学 丘维声教授 第11次研讨会



某教材配套PPT

定义：对 n 阶方阵 A ，若有 n 阶矩阵 B ，使 $AB=BA=E$ ，则称 B 为 A 的逆矩阵，称 A 为可逆的。

(1) 逆阵惟一。

设 B, C 都是 A 的逆，则 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$

排版不规范、分步不精细

建议方案

性质 若方阵 A 可逆，则其逆矩阵唯一。

证明 设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵，则由定义有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

所以 A 的逆矩阵唯一。

三、理论与计算的关系

理论与计算并重

既要保证理论教学，做到教学有深度；
又要重视计算，增强学生的计算能力。

学生现状：“会算”、“会算错”

告诉学生：要相信自己，会算错的！

学生作业与试卷，计算错误多

福建师范大学作业纸

姓名: 洪海 学号: 第 页

3.2) 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 计算 AB , $3A - 2B^T$.

$AB = \begin{pmatrix} 2 \times (-2) + (-1) \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 3 & 0 \times 4 + (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 5 \\ 1 \times (-2) + 1 \times 0 + 4 \times 0 + (-3) \times 3 & 1 \times 4 + 1 \times 1 + 4 \times 2 + (-3) \times 2 & 1 \times 3 + 1 \times 2 + 4 \times 1 + (-3) \times 5 \\ 6 \times (-2) + 5 \times 0 + 0 \times 0 + 2 \times 3 & 6 \times 4 + 5 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 2 & 6 \times 3 + 5 \times 2 + 0 \times 1 + 2 \times 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 15 & 13 \\ -11 & 25 & 20 \\ -6 & 23 & 18 \end{pmatrix}$ “解”要写!
请认真!!!

$3A - 2B^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 3 & 12 & -9 \\ 18 & 15 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & -17 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 & 9 \\ -1 & 20 & 9 & -9 \\ 15 & 17 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$\therefore 3A - 2B^T = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & -2 & -13 \\ 12 & 19 & -2 & 16 \end{pmatrix}$

2. 解: 由 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 得

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$, $A_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$, $A_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2$

因此, A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 2 & 10 \\ 2 & 2 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 3r_3]{r_4 - \frac{1}{3}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r_1 - r_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore r(A) = 3$

且 d_1, d_2, d_3 为一个极大线性无关组
且 $d_3 = -4d_1 + \frac{4}{3}d_2 + \frac{1}{3}d_4$
 $d_5 = -d_1 + 5d_2 + 2d_4$

四、课程思政

习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上强调，要用好课堂教学这个主渠道，各类课程都要与思想政治理论课同向同行，形成协同效应。

思政元素：立德树人，家国情怀、尊敬有礼、遵守纪律、认真、感恩、担当、诚信、……

添加思政元素做到润物细无声，注重言传身教，切忌把“课程思政”变成“思政课程”。

福建师范大学福清分校“课程思政”讲课比赛



精心备课 教书育人

五、个性化教学

帮助学生强化记忆

学生经常将伴随矩阵写错，教学时告诉学生两个关键词“代数”与“转置”，并多次强调，帮助学生记忆。解题过程也有讲究。

定义 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$

称矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

为 A 的伴随矩阵. 其中, A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

关键词 代数、转置

例 求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \therefore A^{-1}$ 存在.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

得

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

故

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 \\ -3 & -6 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

系统总结 便于学习

两个定理到 8种情形

线性相关

不一定

增加向量

增加分量

线性相关

减少向量

减少分量

不一定

线性相关

不一定

线性无关

增加向量

增加分量

线性无关

减少向量

减少分量

线性无关

不一定

南开大学 顾沛教授（第10次研讨会）

5. “可逆线性变换”的十二种等价说法

“ n 维线性空间 $L_n(\mathbb{P})$ 的线性变换 \mathcal{A} 是可逆线性变换”

- ① 有 $L_n(\mathbb{P})$ 的线性变换 \mathcal{B} , 使 $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A} = id$ (恒等变换);
- ② \mathcal{A} 在 $L_n(\mathbb{P})$ 的任一组基下的矩阵是可逆矩阵;
- ③ 对 $L_n(\mathbb{P})$ 的任一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, 基象组 $\{\mathcal{A}(\alpha_1), \dots, \mathcal{A}(\alpha_n)\}$ 仍为 $L_n(\mathbb{P})$ 的一组基;
- ④ \mathcal{A} 的秩为 n , 或 $\dim \mathcal{A}(\mathcal{L}) = n$;
- ⑤ \mathcal{A} 的零度为0, 或 $\dim \mathcal{A}^{-1}(\{0\}) = 0$;
- ⑥ \mathcal{A} 的值域为整个空间, 或 $\mathcal{A}(\mathcal{L}) = L_n(\mathbb{P})$;
- ⑦ \mathcal{A} 的核为零空间, 或 $\mathcal{A}^{-1}(\{0\}) = \{0\}$;
- ⑧ \mathcal{A} 是满射;
- ⑨ \mathcal{A} 是单射;
- ⑩ 存在一个常数项不为零的多项式 $f(x)$, 使 $f(\mathcal{A}) = 0$;
- ⑪ \mathcal{A} 的特征根全不为零;
- ⑫ 若 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$, 则 $\mathcal{L} = \mathcal{A}(\mathcal{L}_1) \oplus \mathcal{A}(\mathcal{L}_2)$.

(原因: $\dim \mathcal{A}(\mathcal{L}) + \dim \mathcal{A}^{-1}(\{0\}) = n$)

6. “线性变换可对角化”（方阵 A 相似于对角阵）的十种等价说法
 \mathcal{A} 是 $L_n(\mathbb{P})$ 的线性变换, \mathcal{A} 在 $L_n(\mathbb{P})$ 的一组基下的矩阵为 A .

- ① 存在 $L_n(\mathbb{P})$ 的一组基 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 使 \mathcal{A} 在这组基下的矩阵为对角形方阵;
- ② 存在数域 \mathbb{P} 上的 n 阶可逆方阵 P , 使 PAP^{-1} 为对角形方阵;
- ③ $L_n(\mathbb{P})$ 中有一组由 \mathcal{A} 的特征向量构成的基, 或 \mathcal{A} 有 n 个线性无关的特征向量;
- ④ $\mathcal{L} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$, 其中 V_i 均是 \mathcal{A} 的一维不变子空间;
- ⑤ \mathcal{L} 的所有特征子空间的维数之和等于 n ;
- ⑥ \mathcal{A} 的每一特征根都是特征值, 且每一特征值的几何重数与其代数重数相等;
- ⑦ \mathcal{A} 的最小多项式是 \mathbb{P} 上互素的一次因式的乘积;
- ⑧ \mathcal{A} 的最小多项式无重根;
- ⑨ 复数域上线性空间 $L_n(\mathbb{C})$ 的线性变换 \mathcal{A} 的初等因子全是一次的, 或若当块全是1阶的;
- ⑩ 复数域上线性空间 $L_n(\mathbb{C})$ 的线性变换 \mathcal{A} 的不变因子均无重根.

重视数学思想与数学方法教学

等价关系（相抵、相似、合同）确定分类

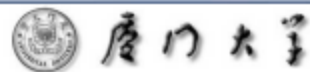
同组关系

同一法与反证法

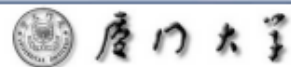
两个集合相等的证明（互相包含）

厦门大学 林亚南教授（第11次研讨会）

以学科的基本思想方法为纲要，统领对教学内容的认识，对教材的理解，从而指导教学活动，找准重点，化解难点，澄清疑点，将自己的备课心得体会告诉学生，这对于提高课程质量，提高学生的学科素质，是很有必要的。



在突出学科的基本思想方法的观点下，可以提升对教学内容的认识，加深对教材的理解，从而改善教学方法，准确地把握重点，化解难点，有效地澄清疑点。同时可以“胸中有数”地针对学生情况讲授核心内容，而将一些延伸的内容安排为攻关性的难题求解，探索性的专题讨论，总结性的专题报告。一方面，有效地提高课堂讲授质量。另一方面，刺激学生的学习热情，提高学生的数学学科素质。



谢谢！