精心备课 教书育人

——线性代数教学心得

福建师范大学福清分校 郭世乐

俗话说：教学有法，但无定法，贵在得法

教学活动虽然要严格按照教学大纲、根据教学目标，达到一定的质量标准，但教学活动的对象和主体是活生生的人，个性差异很大，因而教学过程是一个动态的过程。

一、教材处理

若即若离：再好的教材也不要完全按照教材讲课，再不好的教材也不要完全脱离教材讲课。

讲稿与教材写得一模一样的教师，肯定不是好教师。讲稿与教材有所不同，才能加深扩大学生的知识，培养学生的综合能力。

——潘懋元《高等教育学讲座》

二、教学手段选择

传统与现代相结合：各有优缺点，互为补充。

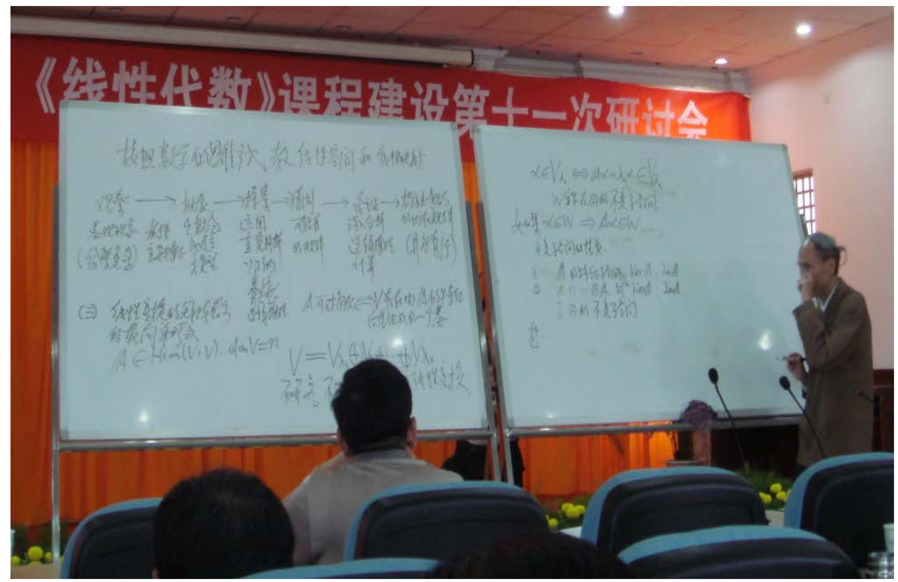
板书的优点是：可以长时间保留，教师讲解速度与学生理解速度协调，学生容易接受；

板书的缺点是：费时间，课堂容量小，备课难度大，对教师要求高。

PPT的优缺点与板书基本相反，但备课难度并不小，对教学内容要熟悉，否则容易“读”PPT。

板书重设计，PPT重精细。

北京大学 丘维声教授 第11次研讨会



某教材配套PPT

定义：对n阶方阵A，若有n阶矩阵B，使$AB=BA=E$，则称B为A的逆矩阵，称A为可逆的。

（1）逆阵惟一。

设B,C都是A的逆，则 $B=EB=(CA)B=C(AB)=CE=C$

排版不规范、分步不精细

建议方案

性质 若方阵 A 可逆，则其逆矩阵唯一．

证明 设 B 和 C 都是 A 的逆矩阵，则由定义有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

于是

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C.$$

所以 A的逆矩阵唯一.

三、理论与计算的关系

理论与计算并重

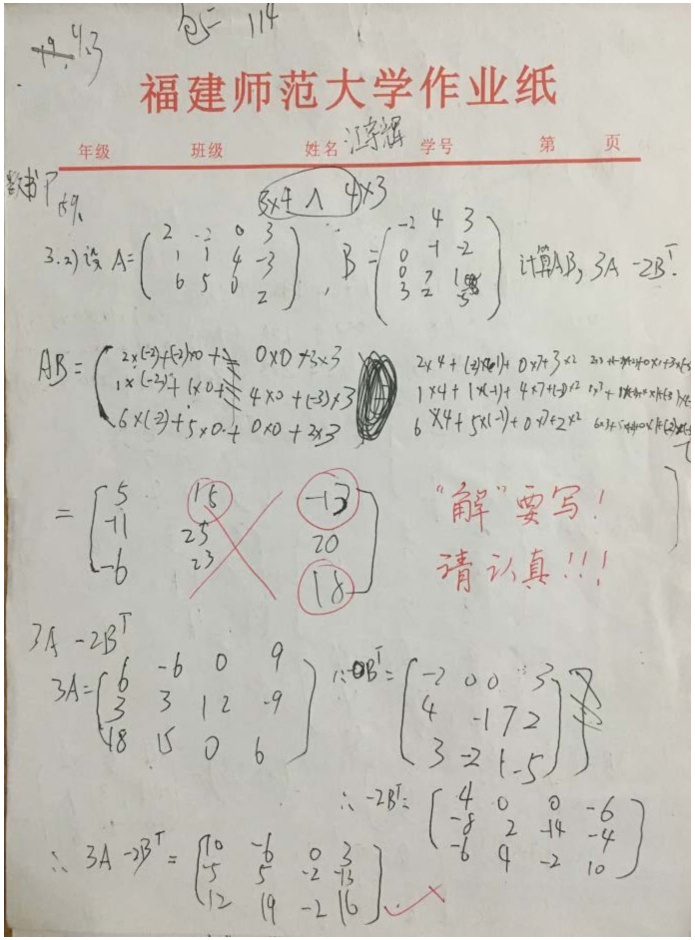
既要保证理论教学，做到教学有深度；

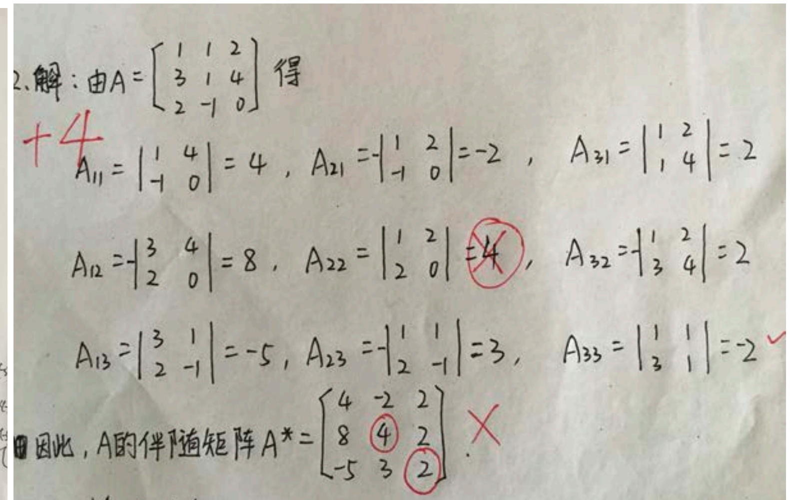
又要重视计算，增强学生的计算能力。

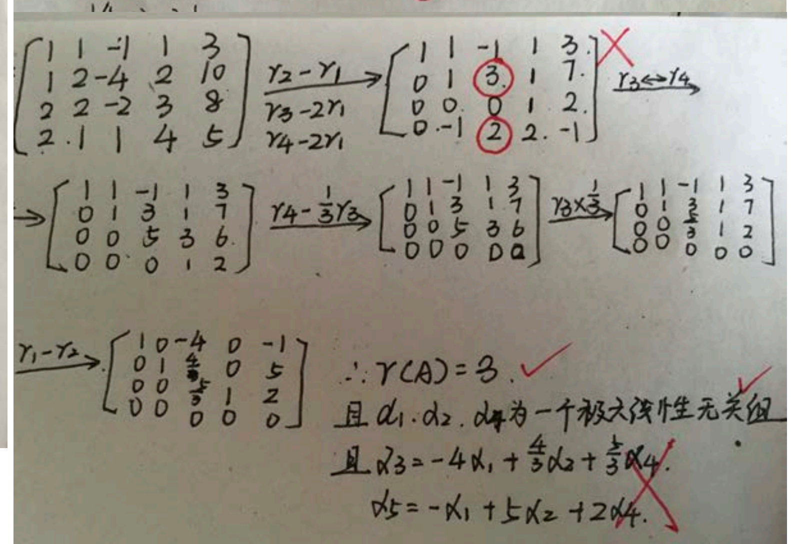
学生现状："会算"、"会算错"

告诉学生：要相信自己，会算错的！

学生作业与试卷，计算错误多







四、课程思政

习近平总书记在全国高校思想政治工作会议上强调，要用好课堂教学这个主渠道，各类课程都要与思想政治理论课同向同行，形成协同效应。

思政元素：立德树人，家国情怀、尊敬有礼、遵守纪律、认真、感恩、担当、诚信、……

添加思政元素做到润物细无声，注重言传身教，切忌把“课程思政”变成“思政课程”。

福建师范大学福清分校"课程思政"讲课比赛

五、个性化教学

帮助学生强化记忆

学生经常将伴随矩阵写错，教学时告诉学生两个关键词“代数”与“转置”，并多次强调，帮助学生记忆。解题过程也有讲究。

定义 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

称矩阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

为 A 的**伴随矩阵**. 其中，A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

关键词 代数、转置

例 求方阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解 $\because \ |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad \therefore\ A^{-1}$**存在.**

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}=6,\quad A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\2&1\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&3\end{vmatrix}=-6,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&2\\3&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&2\end{vmatrix}=-2,$$

得
$$A^*=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix},$$

故
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

系统总结 便于学习

两个定理到8种情形

线性相关　不一定

增加向量　增加分量

线性相关

减少向量　减少分量

不一定　线性相关

不一定　线性无关

增加向量　增加分量

线性无关

减少向量　减少分量

线性无关　不一定

南开大学 顾沛教授 （第10次研讨会）

5. “可逆线性变换”的十二种等价说法

“n维线性空间$L_n(\mathbb{P})$的线性变换$\mathscr{A}$是可逆线性变换”

1. 有$L_n(\mathbb{P})$的线性变换$\mathscr{B}$，使$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=id$（恒等变换）；
2. $\mathscr{A}$在$L_n(\mathbb{P})$的任一组基下的矩阵是可逆矩阵;
3. 对$L_n(\mathbb{P})$的任一组基$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$，基象组$\{\mathscr{A}(\alpha_1),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_n)\}$仍为$L_n(\mathbb{P})$的一组基;
4. $\mathscr{A}$的秩为n，或$\dim\mathscr{A}(\mathscr{L})=n$;
5. $\mathscr{A}$的零度为0，或$\dim\mathscr{A}^{-1}(\{0\})=0$;
6. $\mathscr{A}$的值域为整个空间，或$\mathscr{A}(\mathscr{L})=L_n(\mathbb{P})$;
7. $\mathscr{A}$的核为零空间，或$\mathscr{A}^{-1}(\{0\})=\{0\}$;
8. $\mathscr{A}$是满射;

（原因：$\dim\mathscr{A}(\mathscr{L})+\dim\mathscr{A}^{-1}(\{0\})=n$）

9. $\mathscr{A}$是单射;
10. 存在一个常数项不为零的多项式$f(x)$，使$f(\mathscr{A})=0$;
11. $\mathscr{A}$的特征根全不为零;
12. 若$\mathscr{L}=\mathscr{L}_1\bigoplus\mathscr{L}_2$，则$\mathscr{L}=\mathscr{A}(\mathscr{L}_1)\bigoplus\mathscr{A}(\mathscr{L}_2)$.

6. “线性变换可对角化”（方阵A相似于对角阵）的十种等价说法

$\mathscr{A}$是$L_n(\mathbb{P})$的线性变换, $\mathscr{A}$在$L_n(\mathbb{P})$的一组基下的矩阵为A.

1. 存在$L_n(\mathbb{P})$的一组基$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$使$\mathscr{A}$在这组基下的矩阵为对角形方阵;
2. 存在数域$\mathbb{P}$上的n阶可逆方阵P, 使PAP^{-1}为对角形方阵;
3. $L_n(\mathbb{P})$中有一组由$\mathscr{A}$的特征向量构成的基, 或$\mathscr{A}$有n个线性无关的特征向量;
4. $\mathscr{L} = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus \cdots \bigoplus V_n$, 其中$V_i$均是$\mathscr{A}$的一维不变子空间;
5. $\mathscr{L}$的所有特征子空间的维数之和等于n;
6. $\mathscr{A}$的每一特征根都是特征值, 且每一特征值的几何重数与其代数重数相等;
7. $\mathscr{A}$的最小多项式是$\mathbb{P}$上互素的一次因式的乘积;
8. $\mathscr{A}$的最小多项式无重根;
9. 复数域上线性空间$L_n(\mathbb{C})$的线性变换$\mathscr{A}$的初等因子全是一次的, 或若当块全是1阶的;
10. 复数域上线性空间$L_n(\mathbb{C})$的线性变换$\mathscr{A}$的不变因子均无重根.

重视数学思想与数学方法教学

等价关系（相抵、相似、合同）确定分类

同组关系

同一法与反证法

两个集合相等的证明（互相包含）

厦门大学 林亚南教授 （第11次研讨会）

以学科的基本思想方法为纲要，统领对教学内容的认识，对教材的理解，从而指导教学活动，找准重点，化解难点，澄清疑点，将自己的备课心得体会告诉学生，这对于提高课程质量，提高学生的学科素质，是很有必要的。

厦门大学

在突出学科的基本思想方法的观点下，可以提升对教学内容的认识，加深对教材的理解，从而改善教学方法，准确地把握重点，化解难点，有效地澄清疑点。同时可以“胸中有数”地针对学生情况讲授核心内容，而将一些延伸的内容安排为攻关性的难题求解，探索性的专题讨论，总结性的专题报告。一方面，有效地提高课堂讲授质量。另一方面，刺激学生的学习热情，提高学生的数学学科素质。

厦门大学

谢谢！